Решение олимпиады по физике «Юные таланты»

11 ноября 2017 г 8 класс

Задача № 1

Система, изображенная на рисунке 5 а. представляет собой три вертикальных цилиндра, заполненных жидкостью плотностью $\rho = 800$ кг/м^3 и соединённых между собой. Суммарная площадь поперечных сечений цилиндров $S = 500$ см^2 В цилиндрах могут без трения скользить лёгкие поршни. На первый поршень ставят груз массой $M = 36$ кг, а на третий - $m = 4$ кг. На

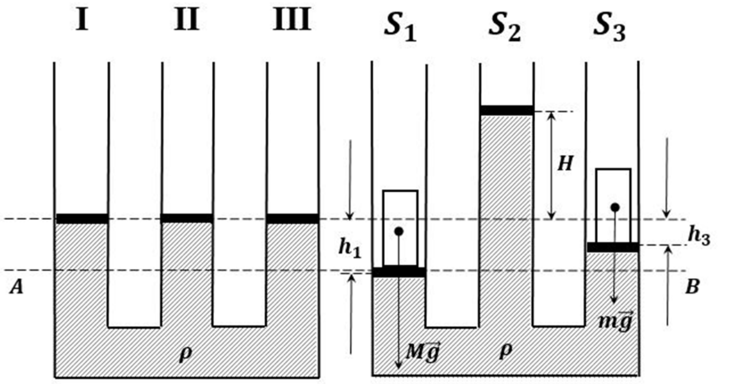


Рисунок 1

а. б.

сколько и куда переместится второй поршень, когда система придёт в равновесие?

Решение

Грузы подействуют весом на жидкость под поршнями, вследствие чего жидкость будет перетекать во второй цилиндр, а грузы опускаться. Система придёт в равновесие после того, как давление грузов на поршни будет уравновешено давлением столба жидкости во втором цилиндре. Обозначим высоту, на которую опустился первый поршень, за h_1, а высоту, на которую опустился третий, за h_3 (рис 5 б.). Искомую высоту обозначим за H. Площади поршней обозначим за S_1, S_2 и S_3 слева направо.

Так как жидкость несжимаема, то объём жидкости вытесненный из под первого и третьего поршней равен изменению объёма жидкости во втором цилиндре.

$$\boxed{h_1 S_1 + h_3 S_3 = H S_2} \quad [1]$$

На уровне AB давление жидкости во всех сосудах одинаково.

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{Mg}{S_1} = \rho g (H + h_1) \\ \frac{mg}{S_3} + \rho g (h_1 - h_3) = \rho g (H + h_1) \end{gathered}} \quad [2]$$

Выразим h_3 из [1] и h_1 из первого уравнения системы [2], после чего используем последнее уравнение.

$$\frac{mg}{S_3} = \rho g \left(H + \frac{HS_2}{S_3} - \frac{Mg}{S_3 \rho g} + \frac{HS_1}{S_3} \right) \bigg| \times S_3$$

$$mg + Mg = \rho g H (S_1 + S_2 + S_3) | : \rho g (S_1 + S_2 + S_3) = \rho g S$$

$$\boxed{H = \frac{M+m}{\rho S}}\ [3]$$

Подставляя данные задачи в итоговую формулу [3], получаем $H = 1$ м.

Система оценивания

1) Выполнен рисунок с указанием сил и смещений поршней – 3 балла.
2) Записано уравнение [1] – 1 балл.
3) Записаны уравнения [2] – 2 балла.
4) Получен окончательный ответ – 5 баллов.
   Суммарно 10 баллов.

Задача № 2

Электрический обогреватель мощностью $P_0 = 925$ Вт отдаёт тепловую энергию окружающему воздуху. График зависимости мощности тепловых потерь от температуры **самого обогревателя** представлен на рисунке 6. Когда обогреватель включили, он нагрелся на 1 ℃ за 5 с, а когда выключили остыл с температуры 90 ℃ до 89 ℃ за 20 с. Какова теплоёмкость нагревателя? Какой была температура обогревателя перед включением?

Решение

Обозначим упомянутые в задаче интервалы времени как: $\tau_1 = 5$ с, $\tau_2 = 20$ с. Искомую температуру обозначим за t^*. Так как речь идет о нагревании и охлаждении в переделах малого интервала температур ($\Delta t = 1$ ℃), то изменением мощности $P(t)$ тепловых потерь на данном интервале можно пренебречь и считать её постоянной.

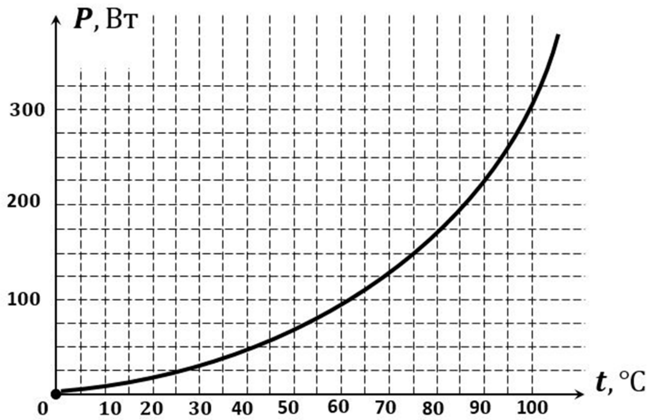


Рисунок 2

Когда обогреватель включили, часть его мощности тратилась на нагревание, а часть отдавалась внешней среде.

$$\boxed{P_0\tau_1 = C\Delta t + P(t^*)\tau_1}\ [1]$$

Когда обогреватель выключили, он начал остывать исключительно за счет передачи тепловой энергии внешней среде.

$$\boxed{C\Delta t = P(90\text{ ℃})\tau_2}\ [2]$$

Из формулы [2] находим теплоёмкость обогревателя.

$$\boxed{C = \frac{P(90\text{℃})\tau_2}{\Delta t}}\ [3]$$

Исключая $C\Delta t$ из [1] и [2] получаем начальную мощность тепловых потерь.

$$\boxed{P(t^*) = P_0 - \frac{P(90\text{ ℃})\tau_2}{\tau_1}}\ [4]$$

При помощи графика вычисляем теплоёмкость по формуле [3] и находим начальную температуру по формуле [4]. $C \approx 4.5$ кДж/℃, $t^* \approx 25$ ℃.

Система оценивания

1) Обосновано приближение $P(t) = const$ на малом интервале температур – 3 балла.

2) Получена формула [1] – 1 балл.
3) Получена формула [2] – 1 балл.
4) Вычислена теплоёмкость C – 2 балла.
5) Найдена начальная температура – 3 балла.

Суммарно 10 баллов.

Примечание: решения с использованием аппроксимации графика, не противоречащие логике и приводящие к верному ответу, так же оцениваются в 10 баллов.

Задача № 3

Автомобиль двигался по шоссе из пункта A в пункт B. Спустя час после выезда водитель быстро уменьшил скорость на 10 км/ч, после чего вновь двигался равномерно. Спустя ещё час он снизил скорость на 40 км/ч. Через 3 часа после выезда автомобиль достиг пункта B, а средняя скорость на всём пути составила 80 км/ч. С какой скоростью автомобиль выехал из пункта A? Какого расстояние между A и B?

Решение

Введём обозначения: $\tau = 1$ ч, $\Delta \upsilon_1 = 20$ км/ч, $\Delta \upsilon_2 = 40$ км/ч, $\langle \upsilon \rangle = 80$ км/ч – средняя скорость автомобиля, AB – искомое расстояние, υ_0 – искомая скорость. Используем формулу для средней

скорости автомобиля на всём пути.

$$\boxed{\langle \upsilon \rangle = \frac{AB}{3\tau} = \frac{\upsilon_0 \tau + (\upsilon_0 - \Delta \upsilon_1)\tau + (\upsilon_0 - \Delta \upsilon_1 - \Delta \upsilon_2)\tau}{3\tau}} \; [1]$$

$$3\langle \upsilon \rangle = 3\upsilon_0 - \Delta \upsilon_2 - 2\Delta \upsilon_1 \Longrightarrow \boxed{\upsilon_0 = \frac{\Delta \upsilon_2 + 2\Delta \upsilon_1}{3} + \langle \upsilon \rangle} \; [2]$$

Подстановка числовых значений в формулу [2] даёт $\upsilon_0 = 100$ км/ч. Числитель формулы [1] – искомое расстояние $AB = 240$ км.

Система оценивания

1) Записана формула для средней скорости – 2 балла.
2) Получена формула [2] – 3 балла.
3) Получены верные ответы – 5 баллов.

Суммарно 10 баллов

Задача № 4

В системе, изображенной на рисунке 7, нити нерастяжимы и невесомы, блоки, пружины и рычаг невесомы, трения нет. Коэффициенты упругости пружин $k = 2k' = 30$ Н/м. Каково отношение масс грузов $\frac{m_1}{m_2}$, если система находится в равновесии? Каково удлинение пружин x, если $m_2 = 1$ кг?

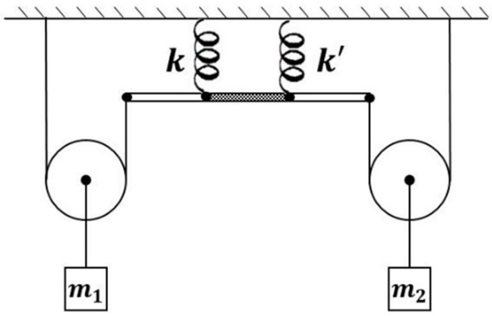
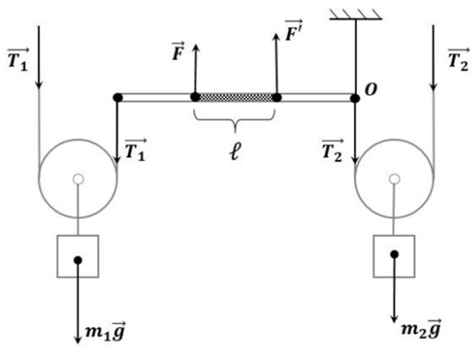


Рисунок 3

Решение

Выполним рисунок (рис. 8) с указанием всех сил, действующих в системе. Сила тяжести первого груза уравновешивается удвоенной силой натяжения нити $\boxed{m_1 g = 2T_1}$ [1]. Аналогично, для второго груза $\boxed{m_2 g = 2T_2}$ [2]. Для пружин справедлив закон Гука: $\boxed{F = kx}$ [3], $\boxed{F' = k'x}$ [4]. Так как горизонтальный



стержень находится в покое, то силы упругости пружин уравновешиваются силами натяжения нитей

$$T_1 + T_2 = F + F'$$

Используя [1] - [4] распишем полученное выше уравнение.

$$\boxed{(m_1 + m_2)\frac{g}{2} = (k + k')x} \text{ [5]}$$

Рисунок 4

Если мысленно жестко зафиксировать любую точку горизонтального стержня, то система останется в равновесии, а стержень можно будет рассматривать как рычаг. Выберем в качестве «опоры» точку O и запишем равенство моментов сил, вращающих рычаг по и против часовой стрелки.

$$F'\ell + 2F\ell = 3T_1\ell |: \ell$$

$$\boxed{(k' + 2k)x = \frac{3}{2}m_1 g} \text{ [6]}$$

Выразим смещение x из [5] и подставим в [6], предварительно разделив оба равенства на g.

$$\frac{m_1 + m_2}{k + k'}(k' + 2k) = 3m_1 \Big| : m_2$$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{k' + 2k}{2k' + k} = \frac{5k'}{4k'} = \frac{5}{4}} \text{ [7]}$$

Используем найденное отношение в формуле [5] и выразим удлинение x.

$$\boxed{x = \frac{9m_2 g}{30k'}} \text{ [8]}$$

Подстановка числовых значений даёт: $x = 20$ см.

Система оценивания

1) Выполнен рисунок с указанием всех сил – 2 балла.
2) Записано уравнение [5] – 2 балла.
3) В том или ином виде получено [6] – 2 балла.
4) Найдено [7] – 2 балла.
5) Найдено и посчитано [8] – 2 балла.

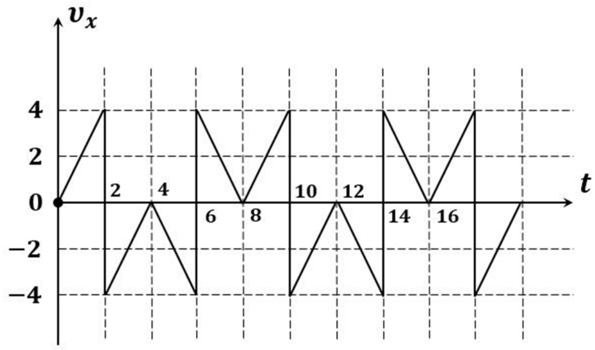
Суммарно 10 баллов.

Решение олимпиады по физике «Юные таланты»

11 ноября 2017 г 9 класс

Задача № 1

Материальная точка A движется вдоль оси x. График зависимости проекции скорости от времени имеет вид бесконечной ломанной, участок которой представлен на рисунке 9. Материальная точка B так же движется вдоль оси x, по закону: $x = X_0 + V_x t$, где t – время. Какими должны быть X_0 и V_x, чтобы A и B встретились ровно 3 раза за время $t \in [0; +\infty)$, притом одна из встреч произошла в точке $x = 0$. Известно, что при $t = 0$ точка A находилась в начале координат. Постройте графики зависимостей координат точек от времени.



Решение

Задачу целесообразно решать графически предварительно построив график зависимости координаты точки A от времени. Каждые $T = 8$ с вид графика зависимости скорости точки от времени повторяется, притом площадь ограниченная графиком над осью абсцисс равняется площади ограниченной графиком под осью, что говорит о колебательном характере движения точки вблизи $x = 0$. Построим зависимость $x(\mathrm{t})$ при помощи уравнения координаты: $x = x_0 + {v_0}_x t + \frac{a_x}{2} t^2$ и условия непрерывности последней на промежутке $t \in [0; T)$ и транслируем её на всю временную ось.

Рисунок 6

$$t \in [0; 2);\ x_0 = 0;\ {v_0}_x = 0; a_x = 2 \ \Longrightarrow \boxed{x = t^2}$$

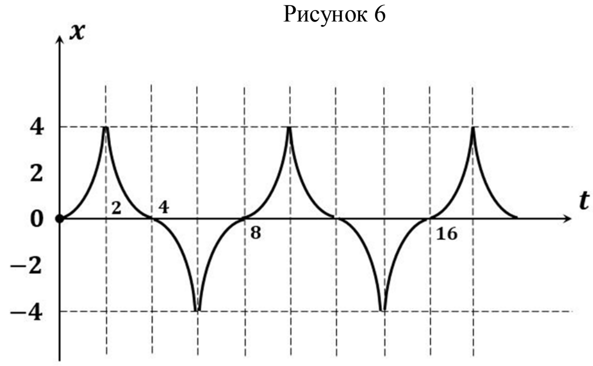


Рисунок 5

$$t \in [2; 4);\ x_0 = 4;\ {v_0}_x = -4; a_x = 2 \ \Longrightarrow \boxed{x = 4 - 4(t-2) + (t-2)^2}$$

$$t \in [4; 6);\ x_0 = 0;\ {v_0}_x = 0; a_x = -2 \ \Longrightarrow \boxed{x = -(t-4)^2}$$

$$t \in [6; 8);\ x_0 = -4;\ {v_0}_x = 4; a_x = -2 \ \Longrightarrow \boxed{x = -4 + 4(t-6) - (t-6)^2}$$

В итоге график $x(t)$ имеет вид, представленный на рисунке 10.

График зависимости координаты от времени для точки B- прямая, пересекающая ось ординат в точкеX_0, тангенс угла наклона которой равен V_x.Встреча тел, означает пересечение графиков, одно из которых по условию должно произойти на оси абсцисс. Вариантов подобных пересечений, вследствие

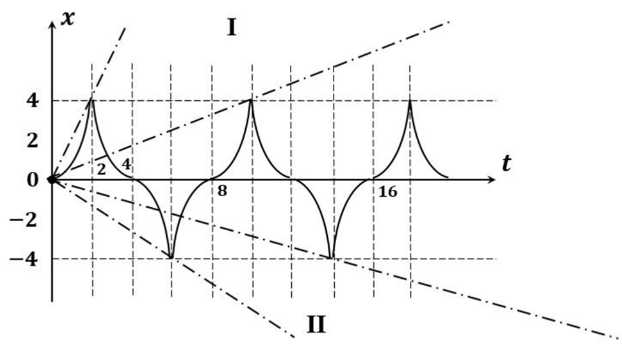
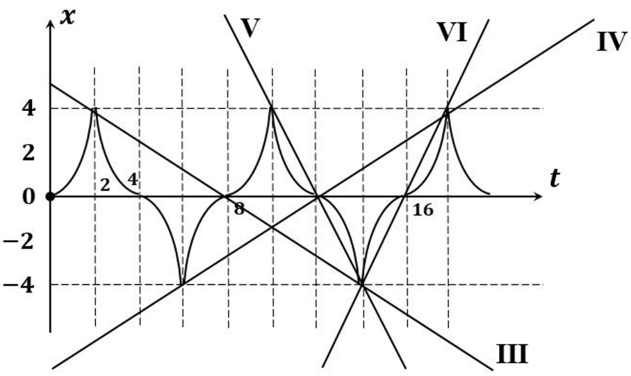


Рисунок 11

Рисунок 12

периодичности движения точки A, бесконечно много, однако они делятся на 7 подгрупп.



1) $X_0 = 0; V_x > 0$ – первая встреча в начальный момент времени в начале координат (рис. 11 I), проекция скорости $V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ лежит в непрерывном **интервале** $(\frac{2}{5}; 2)$.
2) $X_0 = 0; V_x < 0$ – первая встреча в начальный момент времени в начале координат (рис. 11 II.), проекция скорости $V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ лежит в непрерывном **интервале** $(-\frac{2}{7}; -\frac{2}{3})$.
3) $X_0 > 0; V_x = -\frac{2}{3}$ - встреча в точках максимального удаления точки A от начала координат и в точке $x = 0$ в моменты времени $Tn; n \in \mathbb{N}$ (рис. 12 III). Вычислим возможные значения координаты X_0 исходя из того факта, что к моменту времени $t = Tn$ точка B достигнет начала координат.
$$x = X_0 - \frac{4}{3}Tn$$
$$\boxed{X_0 = \frac{32n}{3}}$$
4) $X_0 < 0; V_x = \frac{2}{3}$ - встреча в точках максимального удаления точки A от начала координат и в точке $x = 0$ в моменты времени $4 + Tn; n \in \mathbb{N}$ (рис. 12 IV). Аналогично с (3) получаем:
$$\boxed{X_0 = -\frac{8 + 16n}{3}}$$
5) $X_0 < 0; V_x = 2$ – встреча в точках максимального удаления точки A от начала координат и в точке $x = 0$ в моменты времени $Tn; n \in \mathbb{N}$ (рис. 12 V). Вычислим возможные значения координаты X_0 исходя из того факта, что к моменту времени $t = Tn$ точка B достигнет начала координат.
$$x = X_0 + 2Tn$$
$$\boxed{X_0 = -16n}$$
6) $X_0 > 0; V_x = -2$ – встреча в точках максимального удаления точки A от начала координат и в точке $x = 0$ в моменты времени $t = 4 + T(n-1); n \in \mathbb{N}$ (рис. 12 VI). Аналогично с (5) получаем:
$$\boxed{\mathrm{X}_0 = 16n - 8}$$
7) A и B встречаются в $x = 0$ при $t = 4$ (рис. 13 VII). При этом скорость точки B лежит в **интервале** $\left(\frac{2}{9}; \frac{2}{3}\right)$, а X_0 вычисляется как в пунктах (3)-(6).
$$\boxed{X_0 = -4V_x}$$

Система оценивания

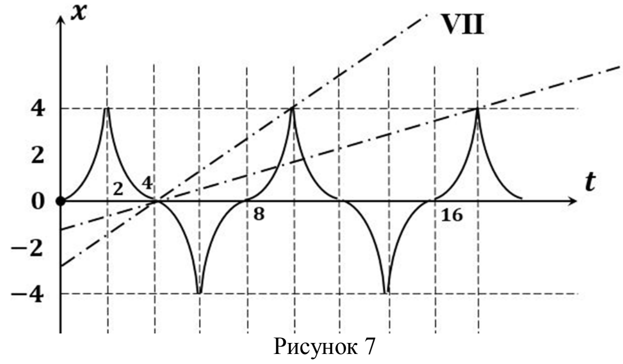


Рисунок 7

1) Обнаружена периодичность $v_x(t)$ и указан период $T = 8$ – 2 балла.
2) Любым, математически обоснованным способом, построен график $x(t)$ для точки A – 4 балла.
3) За каждую верно составленную пару значений $X_0; V_x$ (в том числе не обнаруженную автором задания) – 2 балла.

Суммарно до 20 баллов.

Задача № 2

Электрический обогреватель мощностью $P_0 = 925$ Вт отдаёт тепловую энергию окружающему воздуху. График зависимости мощности тепловых потерь от температуры **самого обогревателя** представлен на рисунке 6. Когда обогреватель включили, он нагрелся на 1 °С за 5 с, а когда выключили остыл с температуры 90 °С до 89 °С за 20 с. Какова теплоёмкость нагревателя? Какой была температура обогревателя перед включением?

Решение

Обозначим упомянутые в задаче интервалы времени как: $\tau_1 = 5$ с, $\tau_2 = 20$ с. Искомую температуру обозначим за t^*. Так как речь идет о нагревании и охлаждении в переделах малого интервала температур ($\Delta t = 1$ °С), то изменением мощности $P(t)$ тепловых потерь на данном интервале можно пренебречь и считать её постоянной.

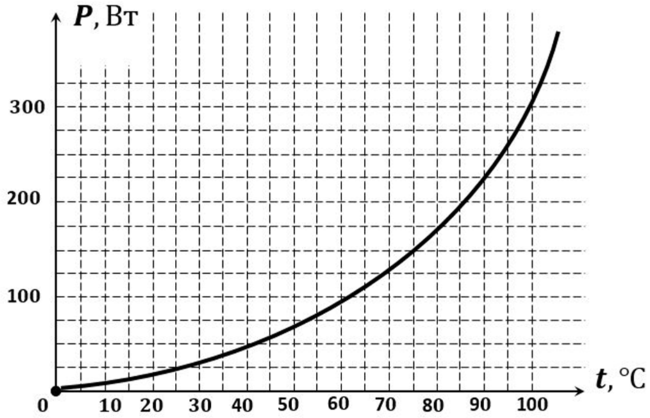


Рисунок 8

Когда обогреватель включили, часть его мощности тратилась на нагревание, а часть отдавалась внешней среде.

$$\boxed{P_0\tau_1 = C\Delta t + P(t^*)\tau_1} \text{ [1]}$$

Когда обогреватель выключили, он начал остывать исключительно за счет передачи тепловой энергии внешней среде.

$$\boxed{C\Delta t = P(90\ ^\circ\text{C})\tau_2} \text{ [2]}$$

Из формулы [2] находим теплоёмкость обогревателя.

$$\boxed{C = \frac{P(90^\circ\text{C})\tau_2}{\Delta t}} \text{ [3]}$$

Исключая $C\Delta t$ из [1] и [2] получаем начальную мощность тепловых потерь.

$$\boxed{P(t^*) = P_0 - \frac{P(90\ ^\circ\text{C})\tau_2}{\tau_1}} \text{ [4]}$$

При помощи графика вычисляем теплоёмкость по формуле [3] и находим начальную температуру по формуле [4]. $C \approx 4.5$ кДж/°С, $t^* \approx 25$ °С.

Система оценивания

1) Обосновано приближение $P(t) = const$ на малом интервале температур – 3 балла.
2) Получена формула [1] – 1 балл.
3) Получена формула [2] – 1 балл.
4) Вычислена теплоёмкость C – 2 балла.
5) Найдена начальная температура – 3 балла.

Суммарно 10 баллов.

Примечание: решения с использованием аппроксимации графика, не противоречащие логике и приводящие к верному ответу, так же оцениваются в 10 баллов.

Задача № 3

При включении резистора в сеть, на подводящих проводах рассеивается 1.98% потребляемой мощности. Какой процент потребляемой мощности будет рассеиваться на подводящих проводах, если резистор заменить на другой с вдвое бóльшим сопротивлением?

Решение

Представим подводящие провода в виде сопротивления r, подключенного последовательно к резистору R (рис. 14). Обозначим неизменное напряжение сети за U. Выразим 1.98% в долях единицы: $\eta_1 = 0.0198$, а искомую долю обозначим как η_2. Найдём мощность, рассеиваемую на всём участке цепи.

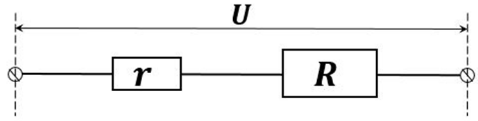


Рисунок 14

$$\boxed{P_1 = \frac{U^2}{r+R}} \quad [1]$$

Сила тока, протекающего через участок цепи, - $I_1 = \frac{U}{r+R}$, а мощность, выделяющаяся на проводах:

$$\boxed{\eta_1 P_1 = \frac{U^2}{(r+R)^2} r} \quad [2]$$

Исключая P_1 и U из [1] и [2] получаем:

$$\boxed{\eta_1 = \frac{r}{r+R}} \quad [3]$$

Аналогично, для удвоенного сопротивления резистора, получаем формулу:

$$\boxed{\eta_2 = \frac{r}{r+2R}} \quad [4]$$

Составим систему из [3] и [4]:

$$\begin{cases} \eta_1 \frac{r}{R} + \eta_1 = \frac{r}{R} \\ \eta_2 \frac{r}{R} + 2\eta_2 = \frac{r}{R} \end{cases} \Rightarrow \eta_2 \frac{\eta_1}{1-\eta_1} + 2\eta_2 = \frac{\eta_1}{1-\eta_1} \Rightarrow \eta_2 = \frac{\eta_1}{2-\eta_1}$$

Подстановка числовых значений даёт: $\eta_2 \approx 0.01$, то есть 1% потребляемой мощности.

Система оценивания

1) Получены формулы [1] и [2] – 2 балла.
2) Получены формулы [3] и [4] – 2 балла.
3) Составлена и решена система – 5 баллов.
4) Найден верный численный ответ – 1 балл.

Суммарно 10 баллов.

Задача № 4

В системе, изображенной на рисунке 7, нити нерастяжимы и невесомы, блоки, пружины и рычаг невесомы, трения нет. Коэффициенты упругости пружин $k = 2k' = 30$ Н/м. Каково отношение масс грузов $\frac{m_1}{m_2}$, если система находится в равновесии? Каково удлинение пружин x, если $m_2 = 1$ кг?

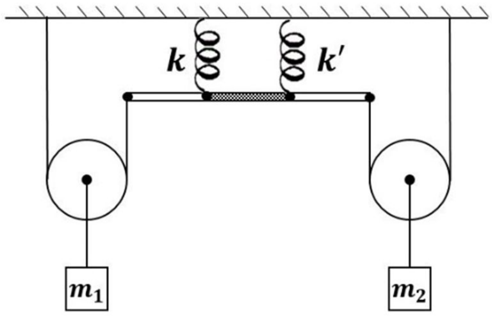


Рисунок 9

Решение

Выполним рисунок (рис. 8) с указанием всех сил, действующих в системе. Сила тяжести первого груза уравновешивается удвоенной силой натяжения нити $\boxed{m_1 g = 2T_1}$ [1]. Аналогично, для второго груза $\boxed{m_2 g = 2T_2}$ [2]. Для пружин справедлив закон Гука: $\boxed{F = kx}$ [3], $\boxed{F' = k'x}$ [4]. Так как горизонтальный стержень находится в покое, то силы упругости пружин уравновешиваются силами натяжения нитей

$$T_1 + T_2 = F + F'$$

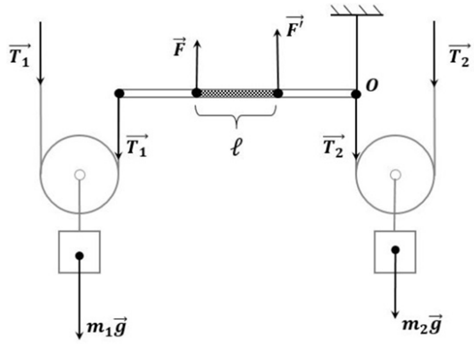


Рисунок 10

Используя [1] - [4] распишем полученное выше уравнение.

$$\boxed{(m_1 + m_2)\frac{g}{2} = (k + k')x} \; [5]$$

Если мысленно жестко зафиксировать любую точку горизонтального стержня, то система останется в равновесии, а стержень можно будет рассматривать как рычаг. Выберем в качестве «опоры» точку O и запишем равенство моментов сил, вращающих рычаг по и против часовой стрелки.

$$F'\ell + 2F\ell = 3T_1\ell | : \ell$$

$$\boxed{(k' + 2k)x = \frac{3}{2}m_1 g} \; [6]$$

Выразим смещение x из [5] и подставим в [6], предварительно разделив оба равенства на g.

$$\frac{m_1 + m_2}{k + k'}(k' + 2k) = 3m_1 \Big| : m_2$$

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{k' + 2k}{2k' + k} = \frac{5k'}{4k'} = \frac{5}{4}} \; [7]$$

Используем найденное отношение в формуле [5] и выразим удлинение x.

$$\boxed{x = \frac{9m_2 g}{30k'}} \; [8]$$

Подстановка числовых значений даёт: $x = 20$ см.

Система оценивания

6) Выполнен рисунок с указанием всех сил – 2 балла.
7) Записано уравнение [5] – 2 балла.
8) В том или ином виде получено [6] – 2 балла.
9) Найдено [7] – 2 балла.
10) Найдено и посчитано [8] – 2 балла.

Суммарно 10 баллов.